PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JUNY 2022	CONVOCATORIA: JUNIO 2022
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

CRITERIS DE CORRECCIÓ / CRITERIOS DE CORRECCIÓN

En les respostes heu d'escriure tots els passos del raonament utilitzat.

Problema 1. Donades les matrius $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Es demana:

a) Demostrar que $C - AB^T$ té inversa i calculeu-la. (4 punts)
b) Calcular la matriu X que verifica $CX = AB^TX + I$, on I és la matriu identitat. (3 punts)
c) Justificar que $(AB^T)^n = 2^nI$ per a tot número natural n. (3 punts)

Solució:

a) $\det(C - AB^T) = 3 \neq 0$, per tant té inversa. $(C - AB^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$.

b) $X = (C - AB^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$.

c) $AB^T = 2I$, per tant $(AB^T)^n = 2^nI$.

Problema 2. Donada la matriu

$$A = \begin{bmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{bmatrix}.$$

Determineu:

a) El rang de la matriu A en funció del paràmetre real m. (4 punts)
b) La matriu inversa de A en el cas $m = 2$. (4 punts)
c) El nombre real m per al qual el determinant de la matriu $2A$ és igual a -8. (2 punts)

Solució:

a) $\det(A) = m^2(2 - 3m)$. Si $m = 0$, el rang és 1; si $m = \frac{2}{3}$, el rang és 2; i si $m \neq 0, \frac{2}{3}$, el rang és 3.

b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & -1/8 & 3/8 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$.

c) $m = 1$.

Problema 3. Donades les rectes $r: \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases}$ i $s: \begin{cases} x = 4 - 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases}$.

a) Indiqueu justificadament la posició relativa de r i s. (5 punts)
b) Trobeu l'equació de la recta l que passa per l'origen i talla r i s. (5 punts)

Solució:

a) Les rectes es creuen en l'espai.

b) $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \end{cases}$.

Problema 4. Donats els plans $\pi_1: 2x - y - z + 4 = 0$ i $\pi_2: \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases}$, i la recta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

a) Calculeu la posició relativa de π_1 i π_2. (3 punts)
b) Calculeu el punt P' que és simètric al punt $P = (1,0,0)$ respecte del pla π_1. (4 punts)
c) Calculeu, si n'hi ha, el punt d'intersecció de π_1 i r. (3 punts)

Solució:

a) π_1 i π_2 són paral·lels no coincidents.
b) $(-3,2,2)$.
c) $(-3,-8,6)$.

Problema 5. Considerem la funció $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4}$. Obteniu:

a) El domini i els punts de tall amb els eixos. (1 punt)
b) Les asímptotes de la funció. (2 punts)
c) Els intervals de creixement i decreixement, i els extrems. (3 punts)
d) La primitiva de la funció $f(x)$. (4 punts)

Solució:

a) Domini $\mathbb{R} - \{-2,2\}$. Punts de tall $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$.
b) AV $x = -2$, $x = 2$ AH $y = 1$.
c) f creix en $(-\infty,-2) \cup (-2,0)$ i decreix en $(0,2) \cup (2,+\infty)$. $x = 0$ és un màxim.
d) $x + \frac{7}{4}\ln(|x-2|) - \frac{7}{4}\ln(|x+2|) + C$.

Problema 6. Es desitja construir un quadrat i un triangle equilàter tallant en dues parts un cable d'acer de 240 m de longitud.

a) Calculeu la suma de les àrees del triangle i del quadrat en funció del valor x que correspon amb els metres que mesura un costat del triangle.
(3 punts)
b) Calculeu la longitud de cable necessària per a construir el triangle de manera que la suma de les àrees del triangle i del quadrat siga mínima i calculeu l'àrea mínima.
(7 punts)

Solució:

a) $\left(\frac{240-3x}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}\,x^2}{4}$.
b) Costat del triangle $x = \frac{720}{4\sqrt{3}+9} = 45.203$ m,
longitud $3x = 3\,\frac{720}{4\sqrt{3}+9} = 135.609$ m,
àrea total $= \frac{14400}{11}\left(3\sqrt{3} - 4\right) = 1565.872$ m^2.

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

Problema 1. Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Se pide:

a) Demostrar que $C - AB^T$ tiene inversa y calcularla. (4 puntos)
b) Calcular la matriz X que verifica $CX = AB^T X + I$, donde I es la matriz identidad. (3 puntos)
c) Justificar que $(AB^T)^n = 2^n I$ para todo número natural n. (3 puntos)

Solución:

a) $\det(C - AB^T) = 3 \neq 0$ luego tiene inversa. $(C - AB^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$.

b) $X = (C - AB^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$.

c) $AB^T = 2I$ luego $(AB^T)^n = 2^n I$.

Problema 2. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinar:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro real m. (4 puntos)
b) La matriz inversa de A en el caso $m = 2$. (4 puntos)
c) El número real m para el cual el determinante de la matriz $2A$ es igual a -8. (2 puntos)

Solución:

a) $\det(A) = m^2(2 - 3m)$. Si $m = 0$ el rango es 1, si $m = \frac{2}{3}$ el rango es 2 y si $m \neq 0, \frac{2}{3}$ el rango es 3.

b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & -1/8 & 3/8 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$.

c) $m = 1$.

Problema 3. Dadas las rectas $r: \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 4 - 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases}$.

a) Indicar justificadamente la posición relativa de r y s. (5 puntos)
b) Hallar la ecuación de la recta l que pasa por el origen y corta a r y s. (5 puntos)

Solución:

a) Las rectas se cruzan en el espacio.

b) $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \end{cases}$.

Problema 4. Dados los planos $\pi_1: 2x - y - z + 4 = 0$ y $\pi_2: \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases}$, y la recta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

a) Calcular la posición relativa de π_1 y π_2. (3 puntos)
b) Calcular el punto P' que es simétrico al punto $P = (1,0,0)$ respecto del plano π_1. (4 puntos)
c) Calcular, si existe, el punto de intersección de π_1 y r. (3 puntos)

Solución:

a) π_1 y π_2 son paralelos no coincidentes.

b) $(-3,2,2)$.

c) $(-3, -8{,}6)$.

Problema 5. Consideramos la función $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4}$. Obtener:

a) El dominio y los puntos de corte con los ejes. (1 punto)
b) Las asíntotas de la función. (2 puntos)
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos. (3 puntos)
d) La primitiva de la función $f(x)$. (4 puntos)

Solución:

a) Dominio $\mathbb{R} - \{-2{,}2\}$. Puntos de corte $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$.
b) AV $x = -2$, $x = 2$ AH $y = 1$.
c) f crece en $(-\infty, -2) \cup (-2{,}0)$ y decrece en $(0{,}2) \cup (2, +\infty)$. $x = 0$ es un máximo.
d) $x + \frac{7}{4}\ln(|x-2|) - \frac{7}{4}\ln(|x+2|) + C$.

Problema 6. Se desea construir un cuadrado y un triángulo equilátero cortando en dos partes un cable de acero de 240 m. de longitud.

a) Calcular la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado en función del valor x que corresponde con los metros que mide un lado del triángulo. (3 puntos)
b) Calcular la longitud de cable necesaria para construir el triángulo de modo que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado sea mínima y calcular el área mínima. (7 puntos)

Solución:

a) $\left(\frac{240-3x}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}\,x^2}{4}$.
b) Lado del triángulo $x = \frac{720}{4\sqrt{3}+9} = 45.203$ m,
longitud $3x = 3\,\frac{720}{4\sqrt{3}+9} = 135.609$ m,
área total $=\frac{14400}{11}\left(3\sqrt{3} - 4\right) = 1565.872$ m^2.