GENERALITAT VALENCIANA
Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport

COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JUNY 2018	CONVOCATORIA: JUNIO 2018
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

BAREM DE L'EXAMEN:
Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Es permet l'ús de calculadores sempre que no siguen gràfiques o programables, i que no puguen realitzar càlcul simbòlic ni emmagatzemar text o fórmules en memòria. S'use o no la calculadora, els resultats analítics, numèrics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

BAREMO DEL EXAMEN:
Se elegirá solamente UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓ A

Problema A.1. Tenim el sistema d'equacions $\begin{cases} \quad\ \ y - z = 1-a \\ -x \quad\ + z = 5 \\ -ax + y - z = 1 \end{cases}$, on a és un paràmetre real.

Obteniu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) Els valors del paràmetre a per als quals el sistema és compatible determinat (2 *punts*).
b) Les solucions del sistema quan $a = 3$ (4 *punts*).
c) Les solucions del sistema per als valors de a que el fan compatible indeterminat (4 *punts*).

Solució: a) $a \neq 0$. b) $x = -1,\ y = 2,\ z = 4$. c) El sistema és compatible indeterminat quan $a = 0$. Les solucions del sistema són $x = \alpha - 5,\ y = \alpha + 1,\ z = \alpha$ per a qualsevol α real.

Problema A.2. Donats els punts $A(-1,2,\lambda)$, $B(2,3,5)$ i $C(3,5,3)$, on λ és un paràmetre real, obteniu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) El valor del paràmetre λ perquè el segment AC siga la hipotenusa d'un triangle rectangle de vèrtexs A, B i C (3 *punts*).
b) L'àrea del triangle de vèrtexs A, B i C quan $\lambda = 6$ (4 *punts*).
c) L'equació del pla que conté el triangle de vèrtexs A, B i C quan $\lambda = 6$ (3 *punts*).

Solució: a) $\lambda = \frac{5}{2}$, b) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$, c) $y + z - 8 = 0$.

Problema A.3. Es dóna la funció $f(x) = \frac{1}{x^2-x}$. Obteniu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) El domini i les asímptotes de la funció $f(x)$ (2 *punts*).

b) Els intervals de creixement i de decreixement de la funció $f(x)$ (4 *punts*).
c) L'àrea limitada per la corba $y = f(x)$, l'eix d'abscisses i les rectes $x = 2$ i $x = 3$ (4 *punts*).

Solució: a) El domini és $(-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1, +\infty)$. Asímptotes: $y = 0,\ x = 0,\ x = 1$. b) La funció és creixent als intervals $(-\infty, 0), (0, \frac{1}{2})$ i decreixent als intervals $\left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, +\infty)$. c) L'àrea demanada és $\int_2^3 f(x)dx = ln\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0.287$.

OPCIÓ B

Problema B.1. Siga A una matriu quadrada tal que $A^2 + 2A = 3I$, sent I la matriu identitat. Calculeu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) Els valors de a i b perquè $A^{-1} = aA + bI$ (3 *punts*).
b) Els valors de α i β perquè $A^4 = \alpha A + \beta I$ (4 *punts*).
c) El determinant de la matriu $2B^{-1}$, sent B una matriu quadrada d'ordre 3 amb determinant 2 (3 *punts*).

Solució: a) $a = \frac{1}{3},\ b = \frac{2}{3}$. b) $\alpha = -20,\ \beta = 21$. c) $\det(2B^{-1}) = 4$.

Problema B.2. Es donen el punt $A(5,7,3)$ i la recta r: $\frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$. Obteniu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) La recta s que talla la recta r, passa pel punt A i és perpendicular a la recta r (4 *punts*).
b) La distància del punt A a la recta r (3 *punts*).
c) La distància del punt $B(1,1,1)$ al pla π que passa per $(3,-1,0)$ i és perpendicular a r (3 *punts*).

Solució: a) $\frac{x-5}{4} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-3}{-1}$. b) s talla a r en el punt $P(1,5,4)$, per tant, $d(A,r) = d(A,P) = \sqrt{21}$. c) $\pi: x - 3y - 2z - 6 = 0$. La distància demanada és $d(B,\pi) = \frac{5\sqrt{14}}{7}$.

Problema B.3. Es divideix un filferro de longitud 100 cm en dues parts. Amb una d'elles, de longitud x, es construeix un triangle equilàter i amb l'altra, de longitud $100 - x$, es construeix un quadrat. Es demana obtenir **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) La funció de la variable x que expressa la suma de les àrees del triàngle equilàter i del quadrat, sent $0 \leq x \leq 100$ (4 *punts*).
b) El valor de x a l'interval $[0,100]$ per al qual l'esmentada funció (suma de les àrees en funció de x obtinguda a l'apartat a)) assoleix el seu mínim valor (3 *punts*).
c) El valor de x a l'interval $[0,100]$ per al qual l'esmentada funció assoleix el seu màxim valor. Interpretar el resultat obtingut (3 *punts*).

Solució: a) $f(x) = \left(\frac{x}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{100-x}{4}\right)^2,\ 0 \leq x \leq 100$. b) $x = \frac{900}{4\sqrt{3}+9}\ cm. \approx 56{,}50\ cm.$ c) $x = 0$. En aquest cas tot el filferro s'utilitza per construir el quadrat.

OPCIÓN A

Problema A.1. Se tiene el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \quad\quad y - z = 1-a \\ -x \quad + z = 5 \\ -ax + y - z = 1 \end{cases}$, donde a es un parámetro real. Se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible determinado (2 *puntos*).
b) Las soluciones del sistema cuando $a = 3$ (4 *puntos*).
c) Las soluciones del sistema para los valores de a que lo hacen compatible indeterminado (4 *puntos*).

Solución: a) $a \neq 0$. b) $x = -1,\ y = 2,\ z = 4$. c) El sistema es compatible indeterminado cuando $a = 0$. Las soluciones del sistema son $x = \alpha - 5,\ y = \alpha + 1,\ z = \alpha$, para cualquier α real.

Problema A.2. Dados los puntos $A(-1,2,\lambda)$, $B(2,3,5)$ y $C(3,5,3)$, donde λ es un parámetro real, se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El valor del parámetro λ para que el segmento AC sea la hipotenusa de un triángulo rectángulo de vértices A, B y C (3 *puntos*).
b) El área del triángulo de vértices A, B y C cuando $\lambda = 6$ (4 *puntos*).
c) La ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices A, B y C cuando $\lambda = 6$ (3 *puntos*).

Solución: a) $\lambda = \frac{5}{2}$, b) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$, c) $y + z - 8 = 0$.

Problema A.3. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x^2-x}$ se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El dominio y las asíntotas de la función $f(x)$ (2 *puntos*).
b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x)$ (4 *puntos*).
c) El área limitada por la curva $y = f(x)$, el eje de abcisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$ (4 *puntos*).

Solución: a) El dominio es $(-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1, +\infty)$. Asíntotas: $y = 0,\ x = 0,\ x = 1$. b) La función es creciente en los intervalos $(-\infty, 0), (0, \frac{1}{2})$ y decreciente en los intervalos $\left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, +\infty)$. c) El área pedida es $\int_2^3 f(x)dx = ln\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0.287$.

OPCIÓN B

Problema B.1. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 + 2A = 3I$, donde I es la matriz identidad. Calcular **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de a y b para los cuales $A^{-1} = aA + bI$ (3 *puntos*).
b) Los valores de α y β para los cuales $A^4 = \alpha A + \beta I$ (4 *puntos*).
c) El determinante de la matriz $2B^{-1}$, sabiendo que B es una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante es 2 (3 *puntos*).

Solución: a) $a = \frac{1}{3},\ b = \frac{2}{3}$. b) $\alpha = -20,\ \beta = 21$. c) $\det(2B^{-1}) = 4$.

Problema B.2. Dados el punto $A(5,7,3)$ y la recta r: $\frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$, se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La recta s que corta a la recta r, pasa por el punto A, y es perpendicular a la recta r (4 *puntos*).
b) La distancia del punto A a la recta r (3 *puntos*).
c) La distancia del punto $B(1,1,1)$ al plano π que pasa por $(3,-1,0)$ y es perpendicular a r (3 *puntos*).

Solución: a) $\frac{x-5}{4} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-3}{-1}$. b) s corta a r en el punto $P(1,5,4)$. Entonces $d(A,r) = d(A,P) = \sqrt{21}$. c) $\pi: x - 3y - 2z - 6 = 0$. La distancia pedida es $d(B,\pi) = \frac{5\sqrt{14}}{7}$.

Problema B.3. Se divide un alambre de longitud 100 cm en dos partes. Con una de ellas, de longitud x, se construye un triángulo equilátero y con la otra, de longitud $100 - x$, se construye un cuadrado. Se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La función de la variable x que expresa la suma de las áreas del triángulo equilátero y del cuadrado, siendo $0 \le x \le 100$ (4 *puntos*).
b) El valor de la variable x en el intervalo $[0,100]$ para el cual dicha función (suma de las àreas en función de x obtenida en el apartado a)) alcanza su mínimo valor (3 *puntos*).
c) El valor de la variable x en el intervalo $[0,100]$ para el cual dicha función alcanza su máximo valor. Interpretar el resultado obtenido (3 *puntos*).

Solución: a) $f(x) = \left(\frac{x}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{100-x}{4}\right)^2,\ 0 \le x \le 100$. b) $x = \frac{900}{4\sqrt{3}+9}\ cm. \approx 56{,}50\ cm.$ c) $x = 0$. En este caso todo el alambre se utiliza para construir el cuadrado.