COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

GENERALITAT VALENCIANA
CONSELLERIA D'EDUCACIÓ, INVESTIGACIÓ, CULTURA I ESPORT

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT — PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JUNY 2017	CONVOCATORIA: JUNIO 2017
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

BAREM DE L'EXAMEN:
Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Es permet l'ús de calculadores sempre que no siguen gràfiques o programables, i que no puguen realitzar càlcul simbòlic ni emmagatzemar text o fórmules en memòria. S'use o no la calculadora, els resultats analítics, numèrics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

BAREMO DEL EXAMEN:
Se elegirá solamente UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados

OPCIÓ A

Problema A.1. Es dóna el sistema d'equacions $\begin{cases} -x + ay + 2z = a \\ 2x + ay - z = 2 \\ ax - y + 2z = a \end{cases}$, dependent del paràmetre real a.

Obteniu **<u>raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat</u>**:

a) La solució del sistema quan $a = 2$. (3 *punts*)

b) Els valors del paràmetre a per als quals el sistema és compatible i determinat. (3 *punts*)

c) El valor del paràmetre a per al qual el sistema és compatible i indeterminat, i totes les solucions del sistema per a aquest valor d'a. (2+2 *punts*)

Solució: a) $(x, y, z) = (2/3, 2/3, 2/3)$. b) $a \neq -1$. c) $a = -1$; $\{(t, t-1, t-1) : t \in R\}$.

Problema A.2. Es donen el punt $P = (1, 1, 1)$, la recta $r : \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$ i el pla $\pi : x + y + z = 1$. Obteniu **<u>raonadament</u>**, **<u>escrivint tots els passos del raonament utilitzat</u>,** les equacions corresponents a:

a) El pla que conté el punt P i la recta r. (2 *punts*)

b) La recta s que passa pel punt P i és perpendicular al pla π, la distància del punt P al pla π, i el punt d'intersecció de la recta s amb el pla π. (2+2+2 *punts*)

c) El pla σ que conté a la recta r i és perpendicular al pla π. (2 *punts*)

Solució: a) D' $r : (x, y, z) = (0, 2, 3) + \lambda(1, 0, 1)$ es dedueix que l'equació del pla demanat és $(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(1, -1, -2)$; l'equació implícita corresponent és $x + 3y - z - 3 = 0$.

b) $s : (x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(1, 1, 1)$; la distància de P a π és $2/\sqrt{3}$ i $s \cap \pi = \{(1/3, 1/3, 1/3)\}$.

c) $\sigma : -x + z - 3 = 0$.

Problema A.3. Volem unir un punt M, situat en una banda d'un carrer de 6 m d'amplària, amb el punt N, situat a l'altra banda del carrer, 18 m més avall, per mitjà de dos cables rectes, l'un des d'M fins a un punt P situat a l'altra banda del carrer, i l'altre des del punt P fins al punt N. En representar el carrer en un sistema cartesià

obtenim que $M = (0,\ 6)$, $P = (x,\ 0)$ i $N = (18,\ 0)$. El cable *MP* ha de ser més gruixut perquè travessa el carrer sense suports intermedis, i té un preu de 10 €/m. El preu del cable *PN* és de 5 €/m.
Obteniu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) El cost total *C* dels dos cables en funció de l'abscissa *x* del punt *P*, quan $0 \le x \le 18$. (3 *punts*)

b) El valor d'x, amb $0 \le x \le 18$, per al qual el cost total *C* és mínim. (4 *punts*)

c) El valor d'aquest cost total mínim. (3 *punts*)

Solució: a) $C = 10\sqrt{x^2+36} + 5(18-x)$. b) $x = 2\sqrt{3} = 3{,}4641$ ($C' < 0$ si $0 \le x < 2\sqrt{3}$ y $C' > 0$ si $2\sqrt{3} < x \le 18$; $C(0) = 150$, $C(2\sqrt{3}) = 141{,}96$, $C(18) \approx 189{,}74$. c) $90 + 30\sqrt{3} \approx 141{,}96$ €.

OPCIÓ B

Problema B.1. Obteniu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) La comprovació que $C^2 = 2C - I$, en què $C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ i I és la matriu identitat d'ordre 3×3, (2,5 *punts*)

i el càlcul de la matriu C^4. (2,5 *punts*)

b) El valor del determinant de la matriu $(3A^4)(4A^2)^{-1}$, sabent que *A* és una matriu quadrada de quatre columnes el determinant de la qual val -1. (3 *punts*)

c) La matriu *B* que admet inversa i que verifica la igualtat $BB = B$. (2 *punts*)

Solució: a) $C^2 + I = \begin{pmatrix} 9+1 & -8 & 4 \\ 4 & -3+1 & 2 \\ -8 & 8 & -3+1 \end{pmatrix} = 2C$; $C^4 = (2C-I)^2 = 4(2C-I) - 4C + I = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$

b) $\dfrac{3^4}{4^4}$. c) $B = I$.

Problema B.2. Siga *T* un tetraedre de vèrtexs *O* = (0, 0, 0), *A* = (1, 1, 1), *B* = (3, 0, 0) i *C* = (0, 3, 0).
Obteniu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) L'equació del pla π que conté els punts *A*, *B* i *C*, (1 *punt*),
i les equacions de la recta h_O perpendicular a π que passa per *O*. (2 *punts*)

b) El punt d'intersecció de l'altura h_O i el pla π. (3 *punts*)

c) L'àrea de la cara els vèrtexs de la qual són els punts *A*, *B* i *C*, (2 *punts*),
i el volum del tetraedre *T*. (2 *punts*)

Solució: a) $\pi : x + y + z = 3$; $h_O : x = y = z$. b) $(1, 1, 1)$. c) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{3}{2}$.

Problema B.3. Donada la funció *f* definida per $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$, per a qualsevol valor real $x \ne 0$, es demana que obtingueu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) Els intervals de creixement i de decreixement de la funció *f*, (2 *punts*)
i els extrems relatius de la funció *f*. (1 *punt*)

b) Les asímptotes de la corba $y = f(x)$. (3 *punts*)

L'àrea de la regió plana limitada per la corba $y = \dfrac{x^2+1}{x}$, $1 \le x \le e$, el segment que uneix els punts $(1, 0)$ i $(e, 0)$, i les rectes $x = 1$ i $x = e$. (4 *punts*)

Solució: a) És creixent quan $|x|>1$ i és decreixent si $0<|x|<1$; el màxim relatiu és $(-1,-2)$ i el mínim relatiu és $(1,\ 2)$. b) Asímptota obliqua: $y=x$ i asímptota vertical: $x=0$. c) $\dfrac{1+e^2}{2}\approx 4{,}1945$.

OPCIÓN A

Problema A.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} -x + ay + 2z = a \\ 2x + ay - z = 2 \\ ax - y + 2z = a \end{cases}$, dependiente del parámetro real a.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La solución del sistema cuando $a=2$. (3 *puntos*)

b) Los valores del parámetro a para los que el sistema es compatible y determinado. (3 *puntos*)

c) El valor del parámetro a para el que el sistema es compatible e indeterminado y obtener todas las soluciones del sistema para ese valor de a. (2+2 *puntos*)

Solución: a) $(x,y,z)=(2/3,2/3,2/3)$. b) $a\neq -1$. c) $a=-1$; $\{(t,t-1,t-1): t\in R\}$.

Problema A.2. Se dan el punto $P=(1,\ 1,\ 1)$, la recta $r:\begin{cases} x + y - z+1 = 0 \\ x + 2y - z-1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi: x+y+z=1.$ Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado,** las ecuaciones de:

a) El plano que contiene al punto P y a la recta r. (2 *puntos*)

b) La recta s que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π, la distancia del punto P al plano π y el punto de intersección de la recta s con el plano π. (2+2+2 *puntos*)

c) El plano σ que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π. (2 *puntos*)

Solución: a) De $r:(x,\ y,\ z)=(0,\ 2,\ 3)+\lambda(1,\ 0,\ 1)$ se deduce que la ecuación del plano pedido es $(x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ 1)+\lambda(1,\ 0,\ 1)+\mu(1,\ -1,\ -2)$; su ecuación implícita es $x+3y-z-3=0$.

b) $s:(x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ 1)+\lambda(1,\ 1,\ 1)$; la distancia de P a π es $2/\sqrt{3}$ y $s\cap\pi=\{(1/3,\ 1/3,\ 1/3)\}$.

c) $\sigma: -x+z-3=0$.

Problema A.3. Se desea unir un punto M situado en un lado de una calle, de 6 m. de anchura, con el punto N situado en el otro lado de la calle, 18 m. más abajo, mediante dos cables rectos, uno desde M hasta un punto P, situado al otro lado de la calle, y otro desde el punto P hasta el punto N. Se representó la calle en un sistema cartesiano y resultó que $M=(0,\ 6)$, $P=(x,\ 0)$ y $N=(18,\ 0)$. El cable MP tiene que ser más grueso debido a que cruza la calle sin apoyos intermedios, siendo su precio de 10 €/m. El precio del cable PN es de 5 €/m.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El costo total C de los dos cables en función de la abscisa x del punto P, cuando $0\le x\le 18$. (3 *puntos*)

b) El valor de x, con $0\le x\le 18$, para el que el costo total C es mínimo. (4 *puntos*)

c) El valor de dicho costo total mínimo. (3 *puntos*)

Solución: a) $C=10\sqrt{x^2+36}+5(18-x)$. b) $x=2\sqrt{3}=3{,}4641$ ($C'<0$ si $0\le x<2\sqrt{3}$ y $C'>0$ si $2\sqrt{3}<x\le 18$; $C(0)=150$, $C(2\sqrt{3})\approx 141.96$, $C(18)\approx 189{,}74$. c) $90+30\sqrt{3}\approx 141{,}96$ €.

OPCIÓN B

Problema B.1. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La comprobación de que $C^2 = 2C - I$, siendo $C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3×3, (2,5 *puntos*)

y el cálculo de la matriz C^4. (2,5 *puntos*)

b) El valor del determinante de la matriz $(3A^4)(4A^2)^{-1}$, sabiendo que A es una matriz cuadrada de cuatro columnas cuyo determinante vale -1. (3 *puntos*)

c) La matriz B que admite inversa y que verifica la igualdad $BB = B$. (2 *puntos*)

Solución: a) $C^2 + I = \begin{pmatrix} 9+1 & -8 & 4 \\ 4 & -3+1 & 2 \\ -8 & 8 & -3+1 \end{pmatrix} = 2C$; $C^4 = (2C-I)^2 = 4(2C-I) - 4C + I = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$

b) $\frac{3^4}{4^4}$. c) $B = I$.

Problema B.2. Sea T un tetraedro de vértices $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 1, 1)$, $B = (3, 0, 0)$ y $C = (0, 3, 0)$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La ecuación del plano π que contiene a los puntos A, B y C, (1 *punto*)

y las ecuaciones de la recta h_O perpendicular a π que pasa por O. (2 *puntos*)

b) El punto de intersección de la altura h_O y el plano π. (3 *puntos*)

c) El área de la cara cuyos vértices son los puntos A, B y C, (2 *puntos*)

y el volumen del tetraedro T. (2 *puntos*)

Solución: a) $\pi : x + y + z = 3$; $h_O : x = y = z$. b) $(1,1,1)$. c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; $\frac{3}{2}$.

Problema B.3. Dada la función f definida por $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, para cualquier valor real $x \neq 0$, se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f, (2 *puntos*)

y los extremos relativos de la función f. (1 *punto*)

b) Las asíntotas de la curva $y = f(x)$. (3 *puntos*)

c) El área de la región plana limitada por la curva $y = \frac{x^2+1}{x}$, $1 \le x \le e$, el segmento que une los puntos $(1, 0)$ y $(e, 0)$, y las rectas $x = 1$ y $x = e$. (4 *puntos*)

Solución: a) Es creciente cuando $|x| > 1$ y es decreciente si $0 < |x| < 1$; el máximo relativo es $(-1, -2)$ y el mínimo relativo es $(1, 2)$. b) Asíntota oblicua: $y = x$ y asíntota vertical: $x = 0$. c) $\frac{1+e^2}{2} \approx 4{,}1945$.